### Задача 1

В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б)\* если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

### Решение:

  В задаче б)  легко привести пример "непродолжаемой" расстановки девяти кораблей (рис. а).

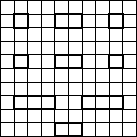
В задаче а)  есть "подводный камень": казалось бы достаточно доказать, что найдется место последнему одноклеточному кораблю. Но, на самом деле, нужно доказать, что в процессе расстановки найдется место каждому очередному кораблю.

Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого отметим 8 вспомогательных кораблей 1×3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. б). Каждый из поставленных кораблей может задеть (пересечь или коснуться) не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

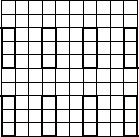
Пусть уже расставлены следующие корабли: 1×4, два 1×3 и меньше трех 1×2. Докажем, что еще один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2, параллельных друг другу, с интервалом две клетки (рис. в). Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетым отмеченный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1×1 с интервалом две клетки (рис. г). Поставленные корабли задевают не больше 15 отмеченных.

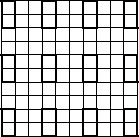
Комментарий. Интересно найти максимальное число одинаковых кораблей, например, 1×4, которые заведомо поместятся.



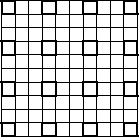
а)



б)



в)



г)

### Задача 2

Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных.

### Решение:

Лемма. Среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел можно выбрать не более четырех так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Доказательство. Разобьем 13 чисел *a*, *a+*1, *a+*12на 9 групп (из одного или двух чисел) и запишем группы по кругу в следующем порядке: *{a+*4*}, {a,a+*9*}, {a+*5*}, {a+*1*,a+*10*}, {a+*6*}, {a+*2*, a+*11*},{a+*7*},{a+*3*,a+*12*}, {a+*8*}*. Если выбрано 5 или более чисел, то некоторые два из них окажутся в одной группе или в соседних группах. Однако из двух соседних групп можно выбрать не более одного числа. Лемма доказана. Отметим 4 средних числа 599, 600, 601, 602, а все остальные числа от 1 до 1200 разобьем на (1200*-*4)*/*13*=*92группы по 13 последовательных чисел (это возможно, так как 598 делится на 13). Из леммы следует, что в группах по 13 чисел можно выбрать не более 92*·*4*=*372*-*4числа требуемым в условии образом. Значит, отмеченные 4 числа выбраны.

### Задача 3

В однокруговом футбольном турнире играли *n>*4команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков.   
а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений.   
б) При каком наименьшем *n*могут не найтись 5 таких команд?

### Решение:

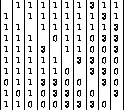
Если две команды набрали поровну очков, то разность между количествами ничьих у них кратна трем. Количество ничьих у команды находится в пределах от 0до *n-*1. Поэтому количество групп, в каждой из которых команды имеют поровну выигрышей, ничьих и поражений, не превосходит *k=*[*http://www.problems.ru/show_document.php?id=1633717*]. Значит, найдется такая группа, состоящая не менее чем из трех команд. Предположим, что все группы состоят из трех или менее команд. Тогда групп ровно *k*(иначе *n<*3*k-*2и [*http://www.problems.ru/show_document.php?id=1633717*]*<k*– противоречие). Рассмотрим группы с наименьшим и наибольшим количеством ничьих.

Если *n=*3*k-*2, то у команд первой группы количество ничьих равно 0, а у команд второй 3*k-*3. Значит, команды второй группы свели вничью все игры, в том числе с командами первой группы, у которых нет ничьих, – противоречие. 

Если *n=*3*k-*1и у команд первой группы по *l*ничьих, то у команд второй группы по *l+*3*k-*3ничьих, т.е. по 1*-l*результативных встреч. Если *l=*1, то вторая группа может содержать только одну команду, так как две команды сыграли бы вничью с командой первой группы, у которой только одна ничья. Если же *l=*0, то первая группа может содержать лишь одну команду, так как две команды имели бы результативную игру с командой второй группы, у которой результативная игра только одна. Таким образом, одна из этих групп содержит лишь одну команду. Но тогда оставшиеся команды нельзя разбить на *k-*1группу, каждая из которых содержит не более трех команд. 

Если *n=*3*k*, то все группы должны содержать ровно по 3команды. При этом если у команд первой группы по *l*ничьих, то у команд второй группы по 2*-l*результативных игр. Поэтому друг против друга команды этих групп проводят не более чем 3*l+*3(2*-l*)*=*6игр – противоречие. 

б) Нетрудно составить турнир 10 команд, три из которых имеют по 1 победе и 8 ничьих, четыре – по 2 победы, 2 поражения и 5 ничьих, и еще три – по 3 победы, 4 поражения и 2ничьих. 

**

Докажем, что случай *n<*10невозможен. Так как не все команды имеют поровну побед, ничьих и поражений, найдутся команды, которые выиграли больше встреч, чем проиграли, и команды, которые проиграли больше, чем выиграли. Предположим сначала, что в каждой из этих групп команд количества побед и поражений отличаются на 1, т. е. в одной группе команды одержали *x*побед, потерпели *x-*1поражение и *n-*2*x*встреч завершили вничью, а в другой эти числа равны соответственно *y-*1, *y*и *n-*2*y*. Тогда, приравнивая набранные командами очки, получаем, что *x=y-*3. Так как *n-*2*yhttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633719*0, то *n-*2*xhttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633719*6, а поскольку *xhttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633719*1, получаем, что *nhttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633719*8. Пусть теперь есть команды, у которых разность между количеством побед и поражений по модулю больше 1. Аналогичные рассуждения показывают, что существуют команды, завершившие вничью по крайней мере 9 встреч. Таким образом, неравенство *nhttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633719*8выполнено всегда, а случай *n<*10возможен, только когда разность между количеством побед и поражений у любой команды по модулю не превышает 1. Предположим, что *n=*8. Тогда, как показано выше, есть *k*команд, у которых побед на одну больше, чем поражений, *k*команд, у которых побед на одну меньше, чем поражений, и 8*-*2*k*команд, у которых побед и поражений поровну. При этом количество ничьих у команд первой группы на 6 больше, чем у команд второй. Это возможно в единственном случае, когда эти команды имеют одну победу и 6 ничьих. Соответственно, у команд второй группы по 3 победы и 4 поражения. Команды первой группы против команд второй проводят *k2*встреч, среди которых нет ничейных (команды второй группы вничью не играли), и не больше чем *k*результативных (по одной на каждую команду первой группы). Значит, *k2http://www.problems.ru/show_document.php?id=1633720 k*, т. е. *k=*1и *n-*2*k=*8*-*2*k>*4(такой турнир существует). Аналогично доказывается, что *khttp://www.problems.ru/show_document.php?id=1633720*2при *n=*9, и *n-*2*k=*9*-*2*k>*4.

### Ответ:

### Задача 4

На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает *n* точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за (*n*+1)2 попыток?

### Решение:

Пусть на листе бумаги осталось k ≥ 1 неразгаданных точек ck,1, ck,2, …, ck,k. Покажем, как с помощью 2k + 1 попытки разгадать одну из них.  
Начертим на листе бумаги отрезок прямой l, не пересекающей отмеченный круг. На этом отрезке так укажем (k + 1) точку   
ak,1, ak,2, …, ak,k + 1, что ak,j лежит строго между ak,j − 1 и ak,j + 1 для всех j = 2,3, … , k. Пусть Миша назвал для этих точек расстояния dk,1, dk,2, … , dk,k + 1 соответственно.  
Найдём с помощью циркуля и линейки и укажем такие точки bk,j (j = 1,2,…,k), что они лежат по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг, и отстоят от точек ak,j и ak,j + 1 на расстояния dk,j и dk,j + 1соответственно (те индексы j, для которых такую точку bk,j указать невозможно, мы пропускаем).  
Докажем, что среди указанных точек bk,j найдётся по крайней мере одна из точек ck,i (i = 1,2,…,k). Действительно, по принципу Дирихле найдутся по крайней мере две точки ak,j и ak,m (1 ≤ j < m ≤ k + 1), для которых ближайшей из неразгаданных точек будет одна и та же точка ck,i для некоторого i (1 ≤ i ≤ k). Тогда, как нетрудно показать, для любой точки из отрезка [ak,j, ak,m], и в частности для точки ak,j + 1, точка ck,i также будет являться ближайшей из всех неразгаданных точек. Следовательно, ck,i будет отстоять от точек ak,j и ak,j + 1 на расстояния dk,j и dk,j + 1 соответственно, и лежать по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг. Таким образом, точка ck,i совпадает с одной из указанных нами точек bk,j (j = 1,2,…,k). Итак, не более чем за 2k + 1 попытки можно заведомо разгадать одну из неразгаданных точек.  
Докажем индукцией по n, что действуя указанным выше образом для k = n, n − 1, …, 1, Коля разгадает все загаданные Мишей точки менее чем за (n + 1)2 попытку. Пусть n = 1, тогда указанный выше способ позволяет угадать единственную неразгаданную точку за   
3 < (n + 1)2 попытки. Предположим, что N неразгаданных точек можно заведомо разгадать менее чем за (N + 1)2 попытку. Пусть   
n = N + 1. Разгадаем одну из загаданных Мишей точек указанным выше способом не более чем за 2N + 3 попытки. Тогда по предположению индукции, все точки могут быть разгаданы менее чем за (N + 1)2+ 2N + 3 = (N + 2)2 попыток. Утверждение доказано.

### Задача 5

Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

### Решение:

Данные прямые не могут пересекать соседние стороны квадрата *ABCD*, так как иначе образуются не два четырехугольника, а треугольник и пятиугольник. Пусть прямая пересекает стороны *BC* и *AD*в точках *M* и *N*. Трапеции *ABMN* и *CDNM* имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как средние линии, т. е. *MN* делит отрезок, соединяющий середины сторон *AB* и *CD*, в отношении 2 : 3. Точек, делящих средние линии квадрата в отношении 2 : 3, имеется ровно четыре. Так как данные девять прямых проходят через эти четыре точки, то через одну из точек проходят по крайней мере три прямые. 

### Задача 6

Числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

### Решение:

Пусть числа выписаны в порядке  *a*1, ..., *a*100;   *xk* и *yk* – соответственно наибольшие длины возрастающей и убывающей последовательностей, начинающихся с *ak*. Предположим, что  *xk* ≤ 10  и  *yk* ≤ 10  для всех *k*. Тогда количество всех различных пар  (*xk*, *yk*)  не превосходит 100. Поэтому  *xk* = *xl*  и  *yk* = *yl*  для некоторых номеров  *k* < *l*.   Но этого не может быть: если  *ak* < *al*,  то  *xk* > *xl*,  а если  *ak* > *al*,  то  *yk*> *yl*.

### Задача 7

Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Докажите, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

### Решение:

Предположим, что нет равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, параллельными сторонами клеток, и вершинами одного цвета. Для удобства можно считать, что раскрашены не узлы, а клетки. Разобьем лист на квадраты со стороной 4; тогда на диагонали каждого такого квадрата найдутся две клетки одного цвета. Пусть число *n* больше количества различных раскрасок квадрата со стороной 4. Рассмотрим квадрат, состоящий из *n*2 квадратов со стороной 4. На его диагонали найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4. Возьмем, наконец, квадрат *K*, на диагонали которого найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4*n*.   
Рассмотрев квадрат со стороной 4*n* и в нем два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4, получим четыре клетки первого цвета, две клетки второго цвета и одну клетку третьего цвета (см. рис.). Аналогично, рассмотрев квадрат *K*, получим клетку, которая не может быть ни первого, ни второго, ни третьего цвета.

